LIÈGE université
Sciences

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2019-2020

Corrigé de l'interrogation du lundi 28 octobre 2019

Version 6 novembre 2019

QUESTIONNAIRE

Théorie

1. (a) Quels sont les domaine de définition et ensemble image de la fonction cosinus ?
   (b) Comment définit-on géométriquement le cosinus du réel 3 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.

2. Enoncer et démontrer la formule liant somme et produit dans le cadre des logarithmes népériens.

Exercices

1. Déterminer les solutions réelles x de l'inéquation suivante
$$|2-x|(x-1) > |x^2| - 2x.$$

2. Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi/2]$, résoudre l'équation
$$\sin(2x) - \sin(4x) = \cos(3x).$$

3. On fixe une base orthonormée de l'espace notée $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$. Si $\overrightarrow{a} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_3}$ et si les composantes de $\overrightarrow{b}$ dans cette base sont $(2, 1, -1)$, déterminer $\overrightarrow{b} \wedge (\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b})\overrightarrow{a}$.

4. Déterminer les parties réelle et imaginaire ainsi que le module du complexe $z = \dfrac{i^{171}(2+i)}{2-i}$.

5. Dans un repère orthonormé, représenter sur des graphiques différents les ensembles décrits par les équations suivantes et préciser leur nom. Dans les cas (a) et (c), préciser l'excentricité, les coordonnées du (des) foyer(s) et l'équation des éventuelles asymptotes.

   (a) $4x^2 - 4 = 12 + y^2$ (b) $x^3 + xy^2 = x$ (c) $1 - x = 2y^2$

6. ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***

   Un réservoir a été complètement rempli en 1 heure 40 minutes par une pompe. Celle-ci donne 15 coups par minute et chaque coup amène un certain nombre de litres. Un robinet adapté à ce réservoir débite 15 litres en 3 minutes. Sachant qu'il faut 10 heures pour vider le réservoir complètement rempli, combien de litres amène chaque coup de la pompe ?

CORRIGE

Théorie

1. **(a) Quels sont les domaine de définition et ensemble image de la fonction cosinus ?**
   (b) Comment définit-on géométriquement le cosinus du réel 3 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.

   Solution. Voir cours

2. **Enoncer et démontrer la formule liant somme et produit dans le cadre des logarithmes népériens.**

   Solution. Voir cours

Exercices

1. **Déterminer les solutions réelles x de l'inéquation suivante**

$$|2-x|(x-1) > |x^2| - 2x.$$

Solution. Comme $x^2 \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$, on a $|x^2| = x^2$. L'inéquation s'écrit donc

$$|2-x|(x-1) > x^2 - 2x \Leftrightarrow |2-x|(x-1) > x(x-2).$$

Si $x = 2$, l'inéquation n'est pas vérifiée. On peut donc diviser les deux membres de l'inéquation par l'expression strictement positive $|2-x|$ et on obtient

$$x - 1 > x\frac{x-2}{|2-x|}.$$

Vu la définition de la valeur absolue, on envisage deux cas.
Si $2 - x > 0$, c'est-à-dire $x < 2$, l'inéquation s'écrit

$$\begin{aligned} x-1 > x\frac{x-2}{|2-x|} &\Leftrightarrow x-1 > x\frac{x-2}{2-x} \\ &\Leftrightarrow x-1 > -x \\ &\Leftrightarrow 2x > 1 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme $x < 2$, les solutions sont les réels de $]1/2, 2[$.
Si $2 - x < 0$, c'est-à-dire $x > 2$, l'inéquation s'écrit

$$\begin{aligned} x-1 > x\frac{x-2}{|2-x|} &\Leftrightarrow x-1 > x\frac{x-2}{x-2} \\ &\Leftrightarrow x-1 > x \\ &\Leftrightarrow 0x > 1. \end{aligned}$$

Cette inéquation est impossible et aucun réel strictement supérieur à 2 n'est solution.
Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est

$$S =]1/2, 2[.$$

2. **Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi/2]$, résoudre l'équation**

$$\sin(2x) - \sin(4x) = \cos(3x).$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$. Comme $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, elle est équivalente à

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right) = \cos(3x)\\
&\Leftrightarrow 2\sin(-x)\cos(3x) = \cos(3x)\\
&\Leftrightarrow \cos(3x)(2\sin(-x) - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \cos(3x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(-x) = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \left(-x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad -x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)\\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \left(x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou}\ x = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi\right)\\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},
\end{aligned}$$

puisque $-\pi/6 + 2k\pi = \pi/6 - \pi/3 + 2k\pi = \pi/6 + (6k-1)\pi/3 = \pi/6 + k'\pi/3$ avec $k' = 6k - 1 \in \mathbb{Z}$ et que $-5\pi/6 + 2k\pi = \pi/6 - \pi + 2k\pi = \pi/6 + (2k-1)\pi = \pi/6 + k''\pi/3$ avec $k'' = 3(2k-1) \in \mathbb{Z}$. L'équation donnée a donc pour ensemble de solutions

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi/2]$ sont

$$\frac{7\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}.$$

3. **On fixe une base orthonormée de l'espace notée $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$. Si $\overrightarrow{a} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_3}$ et si les composantes de $\overrightarrow{b}$ dans cette base sont $(2, 1, -1)$, déterminer $\overrightarrow{b} \wedge (\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b})\overrightarrow{a}$.**

Solution.
Puisque $\overrightarrow{a} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_3}$, les composantes de $\overrightarrow{a}$ dans cette base sont $(-1/2, 0, 2)$.
Le produit scalaire $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}$ est le réel valant $\frac{-1}{2}.2 + 0.1 + 2.(-1) = -3$ et dès lors, les composantes de $(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b})\overrightarrow{a}$ dans cette base sont $(3/2, 0, -6)$.
Par définition du produit vectoriel, le produit vectoriel $\overrightarrow{b} \wedge (\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b})\overrightarrow{a}$ est le vecteur de composantes

$$\left(1.(-6) + 1.0, -\left(2.(-6) + 1.\frac{3}{2}\right), 2.0 - 1.\frac{3}{2}\right) = \left(-6, \frac{21}{2}, \frac{-3}{2}\right).$$

Dès lors,

$$\overrightarrow{b} \wedge (\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b})\overrightarrow{a} = -6\overrightarrow{u_1} + \frac{21}{2}\overrightarrow{u_2} - \frac{3}{2}\overrightarrow{u_3}.$$

4. **Déterminer les parties réelle et imaginaire ainsi que le module du complexe**

$$z = \frac{i^{171}(2+i)}{2-i}.$$

Solution. Comme $i^{171} = i^{168}\ i^3 = -i$, le nombre complexe z s'écrit aussi

$$z = \frac{-i(2+i)}{2-i} = \frac{-i(2+i)^2}{4+1} = \frac{-i(3+4i)}{5} = \frac{4-3i}{5}.$$

Ainsi, sa partie réelle vaut $\Re z = 4/5$, sa partie imaginaire vaut $\Im z = -3/5$, son module vaut $\sqrt{16/25 + 9/25} = \sqrt{1} = 1$.

Notons que le module pouvait être calculé immédiatement puisque le module d'un quotient (resp. produit) de nombres complexes vaut le quotient (resp. produit) des modules de ces complexes, que les puissances de i sont de module 1 et que les complexes $2+i$ et $2-i$ étant conjugués, ils ont même module.

5. **Dans un repère orthonormé, représenter sur des graphiques différents les ensembles décrits par les équations suivantes et préciser leur nom. Dans les cas (a) et (c), préciser l'excentricité, les coordonnées du (des) foyer(s) et l'équation des éventuelles asymptotes.**

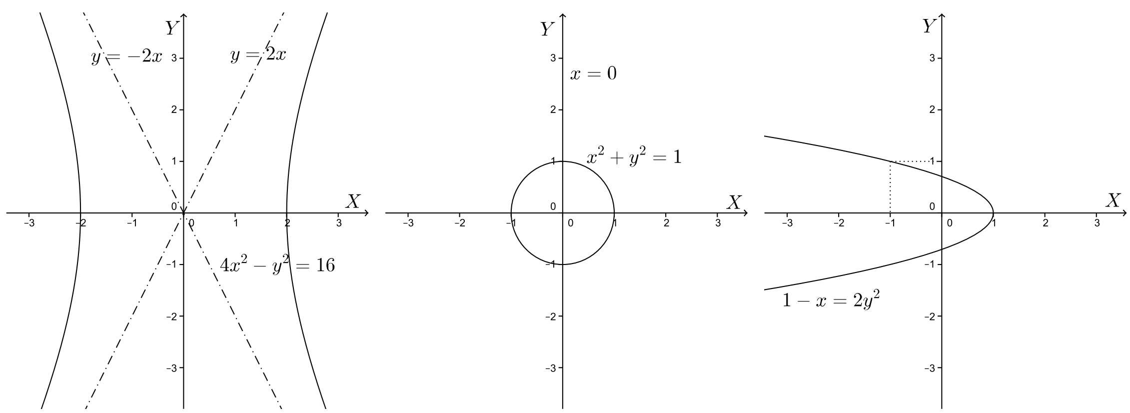
(a) $4x^2 - 4 = 12 + y^2$ (b) $x^3 + xy^2 = x$ (c) $1 - x = 2y^2$

Solution. Puisque $4x^2 - 4 = 12 + y^2 \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2/4 - y^2/16 = 1$, l'équation (a) est celle d'une hyperbole qui intersecte l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2, 0)$ et $(2, 0)$. Ses asymptotes sont les droites d'équation $y = -2x$ et $y = 2x$. Dès lors, les foyers ont pour coordonnées $\left(-2\sqrt{5}, 0\right)$ et $\left(2\sqrt{5}, 0\right)$ et l'excentricité vaut $e = \sqrt{5}$.

Puisque $x^3 + xy^2 = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$, l'équation (b) est celle de la droite d'équation cartésienne $x = 0$ (axe des ordonnées) et celle du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

L'équation (c) $1 - x = 2y^2$ est celle de la parabole dont le foyer a pour coordonnées $(7/8, 0)$ et son excentricité vaut $e = 1$. En effet, elle est la translation de vecteur $(1, 0)$ de la parabole d'équation $(-1/2)x = y^2$ dont le foyer a pour coordonnées $(-1/8, 0)$.

Voici la représentation graphique de ces ensembles :



6. **Problème élémentaire : rédiger votre réponse.**
Un réservoir a été complètement rempli en 1 heure 40 minutes par une pompe. Celle-ci donne 15 coups par minute et chaque coup amène un certain nombre de litres. Un robinet adapté à ce réservoir débite 15 litres en 3 minutes. Sachant qu'il faut 10 heures pour vider le réservoir complètement rempli, combien de litres amène chaque coup de la pompe ?

Solution. Soit x le nombre de litres amenés par la pompe à chacun de ses coups.

Puisque le réservoir est complètement rempli en 1 heure 40 minutes, ou encore 100 minutes, par la pompe qui donne 15 coups par minute, la contenance du réservoir vaut $15 \times 100 \times x = 1500x$ litres.

On sait d'autre part que le réservoir est vidé en 10 heures, ou encore 600 minutes, par un robinet qui débite 15 litres en 3 minutes. En 600 minutes, il aura donc écoulé $600 \times 5 = 3000$ litres, qui est donc l'entièreté du réservoir.

En comparant les deux expressions de la capacité du réservoir, on a $1500x = 3000 \Leftrightarrow x = 2$.

La pompe amène donc 2 litres à chaque coup.